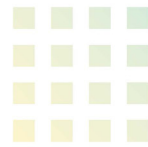


⑧ 실수 전체 구간에서 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값 구하기



주제 개요

기본 수학 성취기준	[12기수02-07] 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.
차시명	Ⅲ. 방정식과 부등식 ③ 이차함수의 최대, 최소 ② 실수 전체 구간에서 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값 구하기(1/1차시)
학 습 목 표	• 실수 전체 구간에서 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.
주 요 활 동	• 주어진 이차함수의 그래프를 보고 가장 큰 함숫값과 가장 작은 함숫값 찾아보기 • 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 최솟값 또는 최댓값을 q 로 예측해보기 • 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 최솟값 또는 최댓값을 q 로 구해보기 • 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 의 그래프에서 최솟값 구해보기
관련 선수학습	이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프와 성질

수업 준비하기

☞ 수업 전 준비할 일

- 학생 활동지 및 마무리 활동지 자료를 작성한다.
- 학생 활동지와 교사용 지도서를 바탕으로 어떻게 지도할 것인지 수업계획을 수립한다.

☞ 수업에 필요한 모둠 편성 방법

- 학생들의 수준과 성향에 따라 개인별 학습과 모둠학습이 모두 가능하다. 단 모둠을 편성하여 진행할 경우, 모둠은 4명 씩 한 모둠으로 편성하고 수준은 상, 중, 하 수준으로 한 모둠으로 편성하는 것이 좋다. 상 수준의 학생을 모둠 대표(멘토)로 정하여 수업 중에 같은 모둠 학생들에게 도움을 줄 수 있도록 한다. 모둠학습의 효과가 나타날 수 있도록 학생 상담을 통하여 사전에 편성 및 지도계획을 수립해야 한다.

● 수업 의도

- 이 수업은 학생들이 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 함숫값의 범위를 구할 수 있다는 점을 전제로 진행되므로, 이차함수의 그래프의 기본 개념이나, 함숫값의 범위를 모르는 학생이 많다면 이전 차시로 돌아가 복습을 해주는 것이 좋다.

기초 실력 쌓기

● 출석 확인 및 단원 소개

- 출석 확인. 모둠을 구성한 경우에는 멘토들에게 출석 확인 및 분위기 정돈을 부탁하도록 한다.
- 전 차시에 배운 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 함숫값의 범위가 q 값과 연관이 있었던 점을 상기시키며, 이차함수의 최댓값, 최솟값 구하기 수업의 진행 방향을 간단하게 소개한다.

● 학습동기유발

- 이전 차시에 배웠던 가장 큰 함숫값과 가장 작은 함숫값에 최댓값, 최솟값이라는 이름만 붙여주면 된다는 점을 얘기하며 학생들의 수업에 대한 두려움과 부담을 줄여주도록 한다.

● 진단평가

본 차시에서 학습할 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하기 위해서는 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프를 그릴 수 있어야 하며, 그래프의 축이 $x = p$ 이고 꼭짓점이 (p, q) 임을 찾을 수 있어야 한다. 더 나아가 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하기 위해서는 $y = ax^2 + bx + c$ 를 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 변형할 수 있어야 한다. 진단평가 단계에서는 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프에서 가장 작은 함숫값과 가장 큰 함숫값을 구해보도록 한다.

① 진단평가

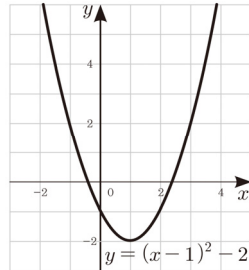
p11. 진단평가 활동지

진단평가에서는 학생들이 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프를 보고 가장 작은 함숫값 또는 가장 큰 함숫값을 찾고 그 값이 꼭짓점과 관계있음을 알고 있는지 평가한다. 진단평가의 결과가 좋지 않다면 이전 차시로 돌아가 복습을 해주도록 한다.

- ➡ 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프를 그려서 가장 작은 함숫값과 가장 큰 함숫값을 찾을 수 있는지를 학생들에게 묻고 학생들에게 진단평가 활동지를 풀어보게 한다. 또한 $x = p$ 일 때의 함숫값 $y = q$ 가 가장 작은 함숫값 또는 가장 큰 함숫값임을 유추해보게 한다.

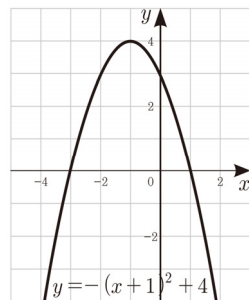
활동지 예상 답안 및 풀이

- ① 다음 이차함수 $y = (x - 1)^2 - 2$ 의 그래프를 보고 다음 물음에 답해 보자.



- (1) 이차함수 $y = (x - 1)^2 - 2$ 의 그래프에서 가장 작은 함숫값을 구해 보자. (1) -2
- (2) 이차함수 $y = (x - 1)^2 - 2$ 의 그래프에서 큰 함숫값을 구해보자. (2) 가장 큰 함숫값은 없음
- (3) (1)에서 구한 가장 작은 함숫값은 $x = a$ 일 때 구할 수 있다. 그때 a 의 값을 구해보자. (3) $a = 1$

- ② 다음 이차함수 $y = -(x + 1)^2 + 4$ 의 그래프를 보고 다음 물음에 답해 보자.



- (1) 이차함수 $y = -(x + 1)^2 + 4$ 의 그래프에서 가장 큰 함숫값을 구해 보자. (1) 4
- (2) 이차함수 $y = -(x + 1)^2 + 4$ 의 그래프에서 가장 작은 함숫값을 구해보자. (2) 가장 작은 함숫값은 없음
- (3) (1)에서 구한 가장 큰 함숫값은 $x = a$ 일 때 구할 수 있다. 그때 a 의 값을 구해보자. (3) $a = -1$

② 학습 목표

- 실수 전체 구간에서 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

본 차시 수업하기

도입

p12. 학생 활동지

본 차시에서 학습할 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프의 최댓값 또는 최솟값을 구하기 위해서는 이미 학습한 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프를 그릴 수 있으며 그래프의 축과 꼭짓점을 찾을 수 있어야 한다. 도입 단계에서는 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 가장 큰 함숫값이 최댓값이고, 가장 작은 함숫값이 최솟값임을 알게 한다.

기초학습 개념 잡고 가기

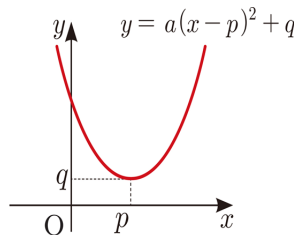
◇ 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 가장 큰 함숫값을 최댓값이라고 한다.

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 가장 작은 함숫값을 최솟값이라고 한다.

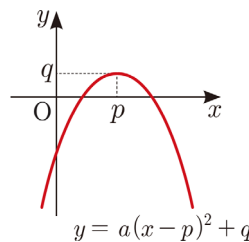
이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 는

1. $a > 0$ 일 때



- $x = p$ 에서 최솟값은 q 이다.
- x 의 값이 한없이 커지거나 작아질 때 함숫값은 한없이 커지므로 가장 큰 함숫값은 없다. 최댓값은 없다.

2. $a < 0$ 일 때



- $x = p$ 에서 최댓값은 q 이다.
- x 의 값이 한없이 커지거나 작아질 때 함숫값은 한없이 작아지므로 가장 작은 함숫값은 없다. 최솟값은 없다.

→ 공학적 도구(알지오매스 <https://www.algeomath.kr/>)를 이용하여 네 이차함수 $y = 4(x+1)^2 + 2$, $y = 3(x-4)^2 + 2$, $y = -5(x+3)^2 + 2$, $y = -6(x-7)^2 + 2$ 의 그래프를 각각 나타낸 것을 보여주고 학습지를 풀어보게 한다.

학생 응답의 예

활동 1 다음은 공학적 도구(알지오매스)를 이용하여 네 이차함수

$$y = 4(x+1)^2 + 2, y = 3(x-4)^2 + 2, y = -5(x+3)^2 + 2,$$

$y = -6(x-7)^2 + 2$ 의 그래프를 각각 나타낸 것이다. 다음 물음에 답해 보자.

(1) 이차함수 $y = 4(x+1)^2 + 2$ 의 그래프에서 최솟값을 구해보자.

(2) 이차함수 $y = 3(x-4)^2 + 2$ 의 그래프에서 최솟값을 구해보자.

(3) 이차함수 $y = -5(x+3)^2 + 2$ 의 그래프에서 최댓값을 구해보자.

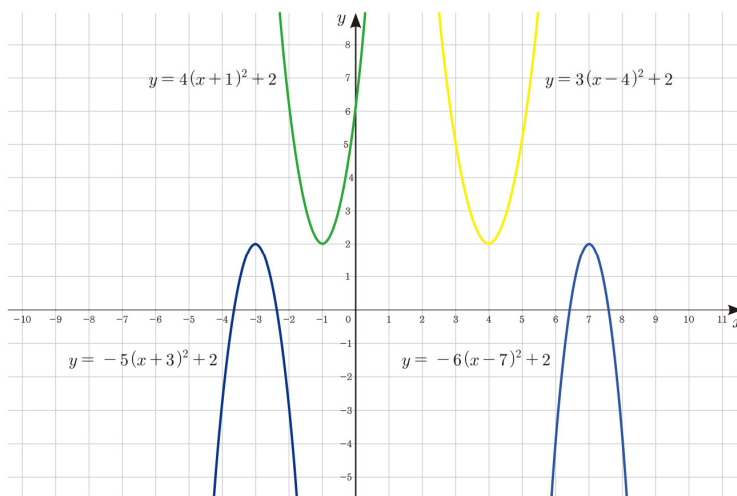
(4) 이차함수 $y = -6(x-7)^2 + 2$ 의 그래프에서 최댓값을 구해보자.

(1) 2

(2) 2

(3) 2

(4) 2



교사용 TIP

위 활동지에서 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 를 제시할 때, 최댓값 또는 최솟값이 q 의 값과 연관이 있다는 점을 학생들 스스로 눈치챌 수 있도록, 의도적으로 q 값을 2로 고정하여 제시하였다.

교사 설명의 예

활동 1 에서 이차함수 $y = 4(x+1)^2 + 2$ 의 그래프에서 최솟값은 2이다. 이차함수 $y = 3(x-4)^2 + 2$ 의 그래프에서도 최솟값은 2이다. 이를 통해 $a > 0$ 일 때, 최솟값은 q 임을 예측하도록 설명할 수 있다. 이차함수 $y = -5(x+3)^2 + 2$ 의 그래프에서 최댓값은 2이다. 이차함수 $y = -6(x-7)^2 + 2$ 의 그래프에서 최댓값은 2이다. 이를 통해 $a < 0$ 일 때, 최댓값은 q 임을 예측하도록 설명할 수 있다. **활동 1** 을 통해 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값은 a 와 p 의 값에 상관없이 q 가 됨을 예측해볼 수 있다.

전개 1

p13. 학생 활동지

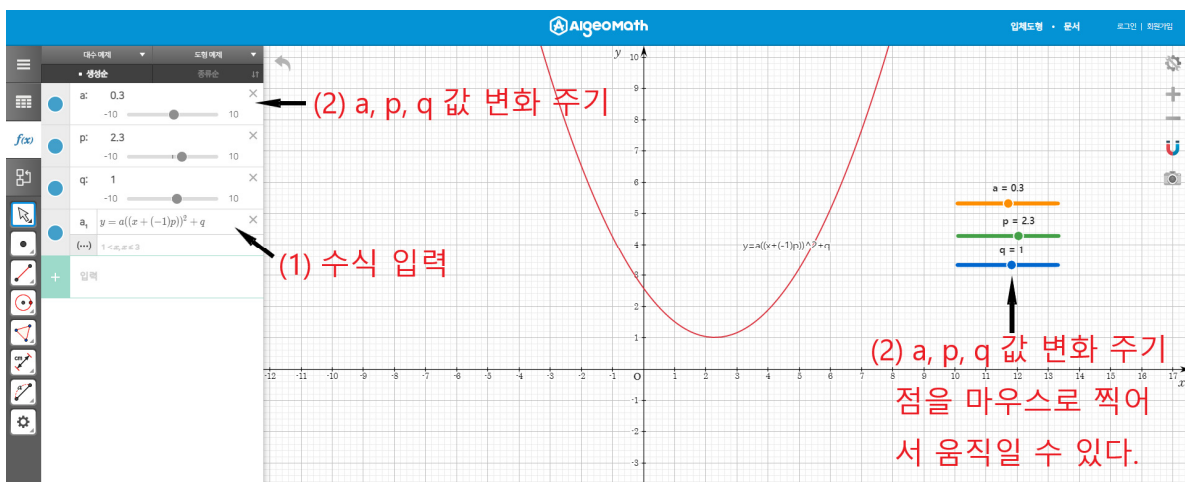
학생들이 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값은 a 와 p 의 값에 상관없이 q 가 됨을 예측해보게 되었다. 이제는 공학적 도구(알지오매스 <https://www.algeomath.kr/>)를 이용하여 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값은 a 와 p 의 값을 변화시켜도 q 가 됨을 확실히 알 수 있도록 한다.

활동 2의 그림은 공학적 도구(알지오매스)를 이용하여 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 학생들은 알지오매스를 이용하여 상수 q 의 값을 특정한 값으로 설정한 상태에서 a 와 p 에 대한 슬라이더를 움직이며 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값이 상수 q 의 값으로 일정함을 관찰하고, a 와 p 의 값에 상관없이 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값이 q 가 됨을 알 수 있다.

교사용 TIP

알지오매스의 슬라이더 기능을 설명하고, 슬라이더를 움직이면서 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프의 최댓값 또는 최솟값을 구해보도록 한다.

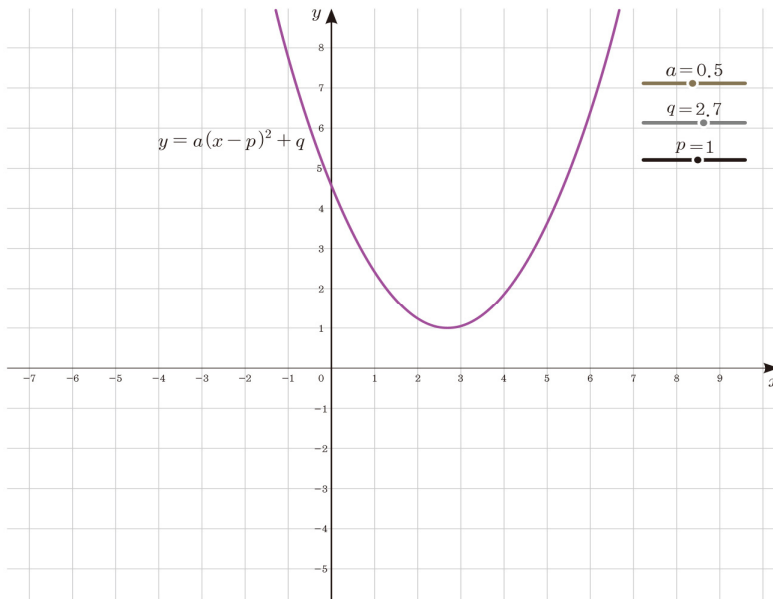
알지오매스 슬라이더 기능 사용법



학생 응답의 예

활동 2 아래 그림은 공학적 도구를 이용하여 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 물음에 답해 보자.
(단, q 는 슬라이더를 이용하여 특정한 값으로 정한다.)

- (1) 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값은 a 와 p 의 값에 상관없이 q 로 일정하다.
(2) q



- (1) a 와 p 에 대한 슬라이더를 움직이며 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값 또는 최솟값의 변화를 관찰하고, a 와 p 의 값에 따라 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프의 최댓값 또는 최솟값이 어떻게 변화하는지 말해보자.
- (2) 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값을 구해보자.

교사 설명의 예

활동 2 를 통해 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값은 q 가 됨을 알게 되었다. 이제는 일반적으로 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값은 어떻게 구할 수 있을지 생각해보자.

전개 2

p14. 학생 활동지

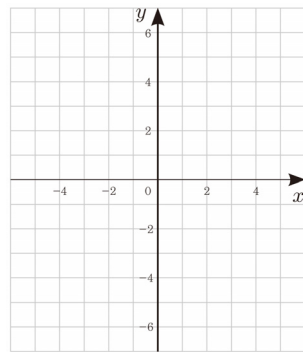
일반적으로 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 최댓값과 최솟값은 어떻게 구할 수 있을지 생각해보자.

→ 활동 3 에서 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 의 그래프에서 최솟값을 구해보는 활동을 한다. 최솟값을 구해본 후에는 공학적 도구(알지오매스)를 사용하여 그래프를 그려서 구한 값이 정확한지 확인해보게 한다.

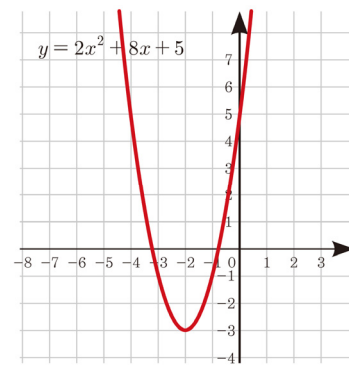
학생 응답의 예

활동 3

- (1) 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 를 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 고쳐보자.
- (2) 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 의 그래프에서 최솟값을 구해보자.
- (3) 알지오매스를 활용하여 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 의 그래프를 그려서 (2)에서 구한 값이 정확한지 확인해보자.



- (1) $y = 2(x + 2)^2 - 3$
- (2) -3
- (3)



학습 내용 정리 및 평가

마무리 활동

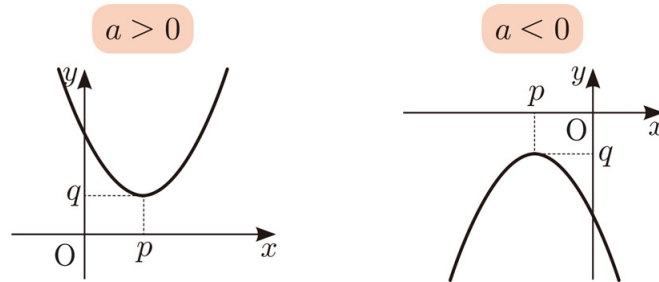
p15. 마무리 활동지

본 차시에서 반복적인 문제 제시와 공학적 도구(알지오매스)의 활용을 통해 학생들 스스로 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값은 꼭짓점의 y 좌표, 즉 q 값과 관련있다는 점을 알 수 있도록 하였다.

학습 내용 정리

◇ 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프에서

- ① $a > 0$ 일 때, 최솟값은 q 이고, 최댓값은 없다.
- ② $a < 0$ 일 때, 최댓값은 q 이고, 최솟값은 없다.



➡ 학생은 제시된 **마무리 활동** 문제를 풀며 본시 학습 내용을 정리할 수 있도록 한다.

활동지 예상 답안 및 풀이

① 다음 이차함수의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

- (1) $y = 7(x - 2)^2 + 4$
- (2) $y = -5(x + 3)^2 - 1$
- (3) $y = -\frac{1}{2}(x + 8)^2 - 7$
- (4) $y = 3(x - \frac{2}{3})^2 - 3$

- (1) 최솟값 4
- (2) 최댓값 -1
- (3) 최댓값 -7
- (4) 최솟값 -3

② 다음 이차함수의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

- (1) $y = x^2 - 6x + 10$
- (2) $y = -2x^2 + 4x + 3$

- (1) 최솟값 1
- (2) 최댓값 5

이런 점이 궁금해요

- Q** 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 를 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 변형하지 못하는 학생들은 어떻게 지도할까요?
- A** 일반적으로 이차함수는 $y = ax^2 + bx + c$ 의 형태로 제시되기 때문에 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 형태로 변화시켜서 그래프의 모양을 예측하여 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 가지는 각종 특징을 찾아내는 것은 매우 중요합니다. 하지만 이번 차시에서는 학생들의 수준을 고려하여 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 형태로 변화시키는 과정을 안내하되 $y = a(x - p)^2 + q$ 형태로 제시된 이차함수의 최댓값과 최솟값을 q 로 정확히 구할 수 있도록 학습 방향을 제시합니다.

참고 자료

출처

- 강옥기, 권언근, 황혜정, 전대열, 노지화, 우희정, 윤상혁, 이형주, 유승연, 윤혜미, 홍창섭, 정경호(2020), 중학교 수학 3, 서울: 동아출판. pp. 110-113.
- 이준열, 최부림, 김동재, 김상미, 원유미, 강해기, 김성철, 강순구(2020), 중학교 수학3, 서울: 천재교육, pp. 110-112.

특성화고·마이스터고 기초학력 향상 프로그램(hijump.or.kr) 연계 안내

(<http://www.hijump.or.kr/standard/study/studylink.jsp?subgubun=ma>)

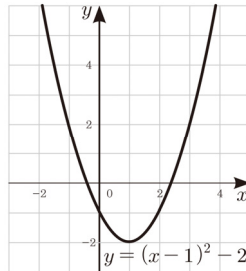
영역	단원	차시
변화와 관계	이차방정식	<ul style="list-style-type: none"> 이차함수의 뜻 이차함수의 그래프의 성질

참고 자료

- EBSmath(<http://www.ebsmath.co.kr>)에 탑재된 영상 “이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하라.”

진단평가 활동지

① 다음 이차함수 $y = (x - 1)^2 - 2$ 의 그래프를 보고 다음 물음에 답해 보자.

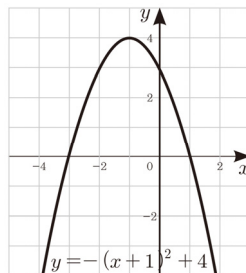


(1) 이차함수 $y = (x - 1)^2 - 2$ 의 그래프에서 가장 작은 함숫값을 구해보자.

(2) 이차함수 $y = (x - 1)^2 - 2$ 의 그래프에서 큰 함숫값을 구해보자.

(3) (1)에서 구한 가장 작은 함숫값은 $x = a$ 일 때 구할 수 있다. 그때 a 의 값을 구해보자.

② 다음 이차함수 $y = -(x + 1)^2 + 4$ 의 그래프를 보고 다음 물음에 답해 보자.



(1) 이차함수 $y = -(x + 1)^2 + 4$ 의 그래프에서 가장 큰 함숫값을 구해보자.

(2) 이차함수 $y = -(x + 1)^2 + 4$ 의 그래프에서 가장 작은 함숫값을 구해보자.

(3) (1)에서 구한 가장 큰 함숫값은 $x = a$ 일 때 구할 수 있다. 그때 a 의 값을 구해보자.

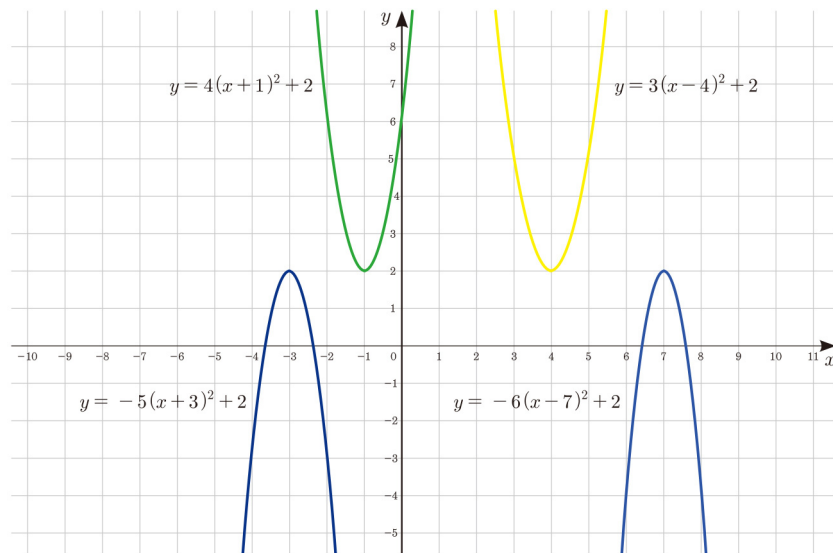
학생 활동지



제목 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값 예측하기

활동 1 다음은 공학적 도구(알지오매스)를 이용하여 네 이차함수 $y = 4(x+1)^2 + 2$, $y = 3(x-4)^2 + 2$, $y = -5(x+3)^2 + 2$, $y = -6(x-7)^2 + 2$ 의 그래프를 각각 나타낸 것이다. 다음 물음에 답해 보자.

- (1) 이차함수 $y = 4(x+1)^2 + 2$ 의 그래프에서 최솟값을 구해보자.
- (2) 이차함수 $y = 3(x-4)^2 + 2$ 의 그래프에서 최솟값을 구해보자.
- (3) 이차함수 $y = -5(x+3)^2 + 2$ 의 그래프에서 최댓값을 구해보자.
- (4) 이차함수 $y = -6(x-7)^2 + 2$ 의 그래프에서 최댓값을 구해보자.

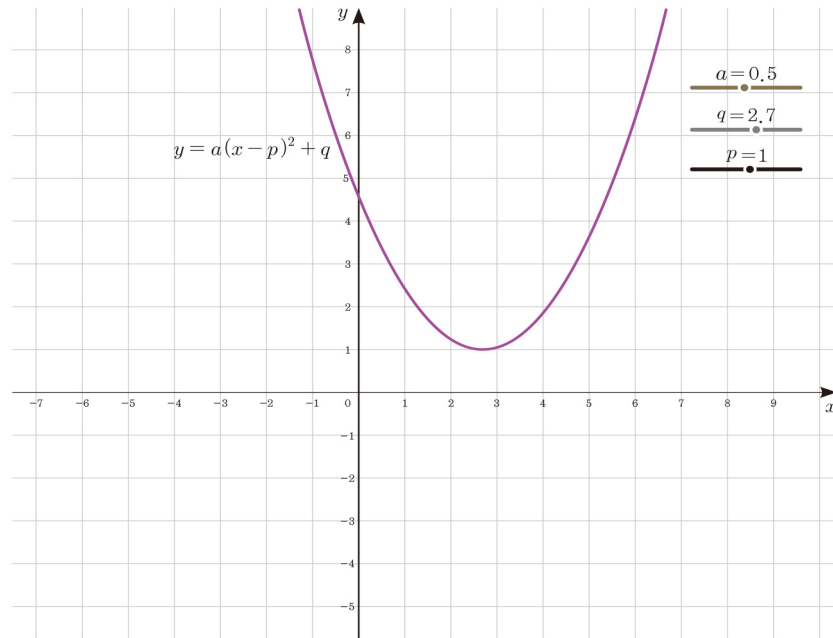




제목

알지오매스를 이용하여 이차함수의 최댓값, 최솟값 찾아보기

활동 2 아래 그림은 공학적 도구를 이용하여 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 물음에 답해 보자. (단, q 는 슬라이더를 이용하여 특정한 값으로 정한다.)



- (1) a 와 p 에 대한 슬라이더를 움직이며 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 최댓값 또는 최솟값의 변화를 관찰하고, a 와 p 의 값에 따라 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프의 최댓값 또는 최솟값이 어떻게 변화하는지 말해보자.
- (2) 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값을 구해보자.



제목

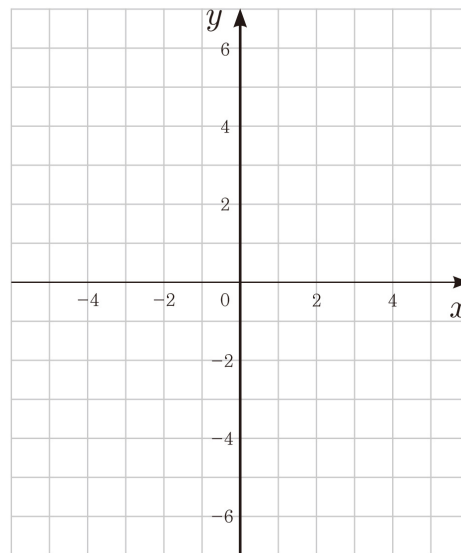
이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 의 그래프에서 최솟값 구하기

활동 3

(1) 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 를 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 고쳐보자.

(2) 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 의 그래프에서 최솟값을 구해보자.

(3) 알지오매스를 활용하여 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 의 그래프를 그려서 (2)에서 구한 값이 정확한지 확인해보자.

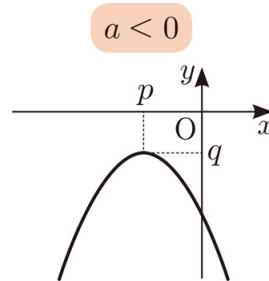
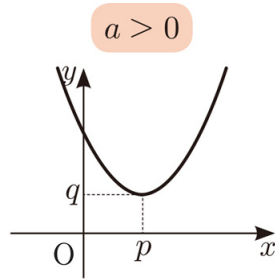


마무리 활동지

학습내용 정리

◇ 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프에서

- ① $a > 0$ 일 때, 최솟값은 q 이고, 최댓값은 없다.
- ② $a < 0$ 일 때, 최댓값은 q 이고, 최솟값은 없다.



마무리 활동 문제

① 다음 이차함수의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

(1) $y = 7(x - 2)^2 + 4$

(2) $y = -5(x + 3)^2 - 1$

(3) $y = -\frac{1}{2}(x + 8)^2 - 7$

(4) $y = 3(x - \frac{2}{3})^2 - 3$

② 다음 이차함수의 그래프에서 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

(1) $y = x^2 - 6x + 10$

(2) $y = -2x^2 + 4x + 3$